5.3 Adi Nokta Civarında Seri Çözümleri II

P, Q, R polinomlar olmak üzere

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (5.1)$$

dif. denkleminin bir $y=\phi(x)$ çözümünün olduğunu ve ϕ'nin $\rho>0$ olmak üzere $|x-x_0|<\rho$ aralığında yakınsak olan

$$y=\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (5.4)$$

Taylor serisine açıldığını düşünelim. (5.1) denkleminde (5.4) serisini yerine yazarak, y için a_n katsayılarını bulabiliriz. (5.4) denkleminin m. türevini alır ve x yerine x_0 koyarsak

$$m!\,a_m = \phi^{(m)}(x_0)$$

denklemini elde ederiz. Buna göre $a_n$leri hesaplamak

için $n=0,1,2,\dots$ olmak üzere $\phi^{(n)}(x_0)$'ı belirlemeliyiz.

ϕ, (5.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0$$

dır. x_0'ı içeren aralıkta P sıfırdan farklı olduğundan $p(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ ve $q(x)=\dfrac{R(x)}{P(x)}$ olmak üzere

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \qquad (5.5)$$

dir. $X=X_0$ için

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0)$$

$2!a_2=\phi''(x_0)$ olduğundan

$$2!\,a_2 = -p(x_0)\,a_1 - q(x_0)\,a_0$$

buluruz. (5.5)'in bir daha türevini alır ve $x=x_0$ koyarsak

$$3!\,a_3 = \phi'''(x_0) = -\left[p\phi'' + (p'+1)\phi' + q'\phi\right]_{x=x_0}$$
$$= -2!\,p(x_0)\,a_2 - \left[p'(x_0) + q(x_0)\right]a_1 - q'(x_0)a_0$$

a_3 katsayısını buluruz. a_2'nin değeri yerine konursa a_3'ü a_1 ve a_0'ın değerleri cinsinden buluruz. P, Q, R polinom ve $P(x_0) \neq 0$ olduğundan p ve q'nun x_0'da bütün türevleri vardır. Böylece (5.5) denkleminin her mertebeden türevi vardır ve her türevden sonra $x = x_0$ konursa $a_4, a_5, \ldots$ katsayılarını bulabiliriz.

Burada dikkat edilecek nokta p ve q'nun her mertebeden türevlerinin olmasıdır. Yani p ve q, x_0'da analitiktir, yani x_0'ı içeren bir aralıkta yakınsak Taylor serisine açılmasıdır;

$$p(x) = p_0 + p_1(x-x_0) + \cdots + p_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$$
$$q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \cdots + q_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$$

Buna göre adi ve tekil (singüler) noktayı genelleştirebiliriz. Eğer x_0 noktasında $p = \frac{Q}{P}$ ve $q = \frac{R}{P}$ analitik ise x_0, (5.1) denkleminin bir <u>adi noktasıdır</u>. Diğer durumda <u>tekil nokta</u> denir.

<u>Teorem:</u> x_0 noktası

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

dif. denkleminin adi noktası ise a_0, a_1 keyfi sabitler, y_1, y_2 dif. denklemin x_0'da analitik lineer bağımsız iki seri çözümü olmak üzere dif. denklemin genel çözümü

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

dir. Ayrıca y_1, y_2 serilerinin yakınsaklık yarıçapı en azından p ve q serilerinin yakınsaklık yarıçaplarının minumumundan daha büyük veya eşittir.

P, Q, R polinomlar ise kompleks fonksiyonlar teorisinden eğer $P(x_0) \neq 0$ ise Q/P veya R/P x_0'da analitiktir. Hatta örneğin P ve Q'nun ortak çarpanı varsa ortak çarpanları sadeleştirdikten sonra Q/P'nin x_0'da kuvvet serisi için yakınsaklık yarıçapı, x_0'dan P'nin en yakın sıfırına olan uzaklığıdır. Bu uzaklığı saptamaya çalışırken $P(x)=0$'ın kompleks köklerini de düşünmeliyiz.

Örnekler: 1) $x_0=0$'da $\frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$x_0=0$'da $\frac{1}{1+x^2}$'in Taylor serisi

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

dir. Oran testine göre $\rho=1$ çıkar. Diğer yaklaşıma göre, $Q(x)=1$ $P(x)=1+x^2 \Rightarrow P(x)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm i$ dir, i ve $-i$'nin 0'a olan uzaklığı 1 dir. Dolayısıyla $\rho=1$ dir.

2) $(x^2-4x+5)^{-1}$'in $x=0$ ve $x=2$'de Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı nedir.

$$\frac{1}{x^2-4x+5} \qquad Q(x)=1,\; P(x)=x^2-4x+5$$

$P(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow x_{1,2}=2\pm i$

$2\pm i$'nin $x=0$' olan uzaklığı $\sqrt{5}$ dir. Dolayısıyla $\rho=\sqrt{5}$ dir. $\left(y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\; |x|<\sqrt{5} \right)$

$2\pm i$'nin $x=2$'e olan uzaklığı 1'dir. Dolayısıyla $\rho=1$ dir.

$\left(y=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-2)^n,\quad |x-2|<1 \right)$

3) $(1+x^3)y''+4xy'+y=0$ dif. denkleminin $x=0$ ve $x=2$ noktalarındaki seri çözümlerinin yakınsaklık yarıçapları için bir altsınır belirleyiniz.

$P(x)=1+x^3,\; Q(x)=4x,\; R(x)=1$

$P(x)=0 \Rightarrow 1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)=0 \Rightarrow x_1=-1,\; x_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$p(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{4x}{1+x^3}$ $x=0$' Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı $\rho=1$ dir ($x=0$'ın x_1, x_2, x_3'e olan uzaklığı 1'dir)

$q(x)$'in Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı da 1'dir.

$x=0$'da dif. denkleminin bağımsız iki seri çözümünün yakınsaklık yarıçapları 1'den büyük veya eşittir.

$p(x)$ ve $q(x)$'in $x=2$'de Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı $\rho=\sqrt{3}$ dür. ($x=2$'nin x_2 ve x_3'e olan uzaklığı $\sqrt{3}$'tün)

$x=2$'de dif. denklemin bağımsız iki seri çözümünün yakınsaklık yarıçapları $\sqrt{3}$'ten büyük veya eşittir.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-2)^n \qquad |x-2|<\sqrt{3}$$

5.4 Düzgün Tekil Noktalar.

Bu bölümde

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0 \qquad (5.1)$$

dif. denklemini bir tekil nokta civarında inceliyeceğiz.

<u>Örnek:</u> 1) ν herhangi bir sabit olmak üzere

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) = 0$$

Bessel denkleminin tekil ve adi noktalarını bulunuz.

$$P(x) = x^2 \qquad P(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x=0$ tekil nokta $x \neq 0$ noktaları adi noktalardır.

2) α sabit olmak üzere

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \alpha(\alpha-1) = 0$$

Legendre denkleminin tekil ve adi noktalarını bul.

$$P(x) = 1 - x^2 \qquad P(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$x=-1$ ve $x=1$ tekil noktalar bunların dışındaki noktalar adi noktalardır.